Disequazioni irrazionali (metodo algebrico)

Nelle disequazioni irrazionali l'incognita compare sotto radice.

I tipi più semplici sono:

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad e \quad \sqrt[n]{f(x)} > g(x)$$

Nel caso di n dispari è sufficiente elevare alla n per ottenere una disequazione equivalente senza i radicali.

Nel caso di n pari si distinguono i 2 casi:

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad e \quad \sqrt[n]{f(x)} > g(x)$$

Il primo caso ($\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$) è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{(per poter calcolare la } \sqrt[n]{f(x)}\text{)} \\ g(x) > 0 & \text{(perché } \sqrt[n]{f(x)} \geq 0\text{)} \\ f(x) < g^n(x) & \text{(elevando ad } n\text{)} \end{cases}$$

Nel secondo caso la disequazione

$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$ è equivalente ai sistemi:

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^n(x) \end{cases}$$

Nel primo sistema, se g è negativa, le soluzioni sono quelle per le quali f è positiva, infatti un numero positivo è sempre maggiore di un numero negativo. Nel secondo sistema se g è positiva si può elevare alla n e si mantiene il verso della disuguaglianza. Alla fine si uniscono le soluzioni.

Esempi

1) $\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}} > 1$

$$\begin{cases} 1 \geq 0 \\ \dfrac{x+3}{x-2} > 1 \end{cases} \quad e \quad \cancel{\begin{cases} 1 < 0 \\ \dfrac{x+3}{x-2} \geq 0 \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+3}{x-2} > 1$$

$$\frac{x+3-x+2}{x-2} > 0 \,, \quad \frac{5}{x-2} > 0 \,, \quad x-2 > 0 \,, \quad x > 2$$

2) $\sqrt[3]{5-8x^3} < 1-2x$

$5-8x^3 < (1-2x)^3, \quad 5-\cancel{8x^3} < 1-\cancel{8x^3}-6x+12x^2$

$12x^2-6x-4>0, \quad 6x^2-3x-2>0$

$\Delta = 3^2+4\cdot 6\cdot 2 = 9+48 = 57 > 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{\Delta}}{12} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{12}$$

Le soluzioni sono:

$$x < \frac{3-\sqrt{57}}{12} \quad e \quad x > \frac{3+\sqrt{57}}{12}$$

3) $\sqrt{x^2-8x+15} > x-6$

$$\begin{cases} x^2-8x+15 \geq 0 \\ x-6<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-6 \geq 0 \\ x^2-8x+15 > (x-6)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x-5) \geq 0 \\ x<6 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 6 \\ \cancel{x^2}-8x+15 > \cancel{x^2}-12x+36 \end{cases}$$

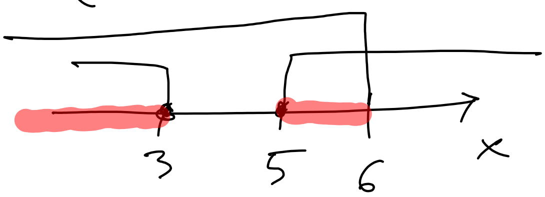
$x-3$ $- - - -$ (3) $+ + +$

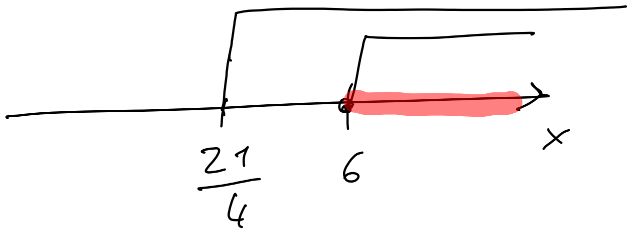
$x-5$ $- - - - - - -$ (5) $+ +$

$(x-3)(x+5)$ $+ + +$ (3) $- - -$ (5) $+ +$

$$\vee \begin{cases} x \geq 6 \\ 4x > 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5,\ x \leq 3 \\ x < 6 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \geq 6 \\ x > \frac{21}{4} \end{cases}$$





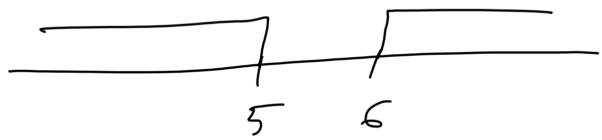
$x < 3 \ \vee \ 5 \leq x < 6 \quad \vee \quad x \geq 6$

Soluzione : $x < 3 \ \vee \ x \geq 5$

4) $\sqrt{5-x} < x - 6$

$$\begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x - 6 > 0 \\ 5 - x < (x-6)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 5 \\ x > 6 \\ 5 - x < x^2 - 12x + 36 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 5 \\ x > 6 \\ x^2 - 11x + 31 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x > 6 \\ \Delta < 0 \ \text{soluz.} \ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Non ha soluzioni